MÉCANIQUE DES FLUIDES

Dynamique des fluides (hydrodynamique)

6

1 – PRÉAMBULE

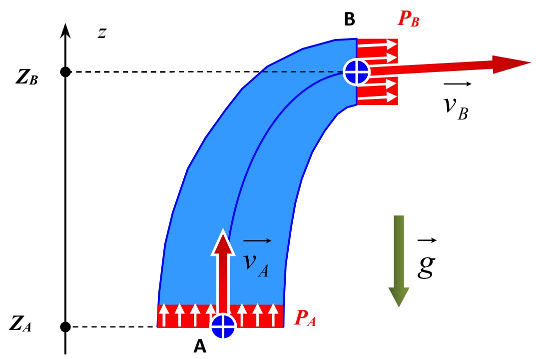
La dynamique des fluides a pour but l'étude des écoulements fluides.

Démarche pour étudier un écoulement fluide : l'écoulement fluide étant supposé continu (il n'y a pas de « trou » dans la matière), on peut lui appliquer le principe de conservation de la masse. Par ailleurs, pour un volume de fluide donné, on peut lui appliquer le principe de conservation de l'énergie. Ceci donne **l'équation fondamentale de la dynamique des fluides**, appelée théorème de Bernoulli.

⇒ *Dans la suite, on s'intéresse au fluide **incompressible** et **homogène** (cas des liquides).*

⇒ *Les gaz seront considérés comme **incompressible** et **homogène** à condition que le gradient de pression entre l'entrée et la sortie n'excède pas 3000 Pa.*

2 – THÉOREME DE BERNOULLI



Considérons un écoulement fluide placé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.

observons la déplacement d'une masse fluide allant de **A** vers **B** en suivant la *ligne de courant* (**A,B**).

Pour simplifier les calculs à venir, on raisonne sur une masse unitaire : m = 1 *kg*.

Ajoutons que l'équation de continuité implique que $m_A = m_B = m = 1$ *kg*.

Daniel Bernoulli
(1700 – 1782)

Écoulement sans échange de travail avec l'extérieur

Bilans énergétiques (on rappelle que $m_A = m_B = m = 1$ *kg*).

Énergie	en **A**	en **B**
potentielle de hauteur	$E_{A\,1} = g \cdot z_A$	$E_{B\,1} = g \cdot z_B$
de pression	$E_{A\,2} = \frac{1}{\rho} \cdot P_A$	$E_{B\,2} = \frac{1}{\rho} \cdot P_B$
cinétique	$E_{A\,3} = \frac{1}{2} \cdot v_A^2$	$E_{B\,3} = \frac{1}{2} \cdot v_B^2$
thermique	$E_{A\,4} = c \cdot T_A$	$E_{B\,4} = c \cdot T_B$
Totale	$E_{Totale\ A} = \sum E_{A\,i}$	$E_{Totale\ B} = \sum E_{B\,i}$

L'énergie totale en **A** vaut : $E_{TA} = E_{A1} + E_{A2} + E_{A3} + E_{A4} = g \cdot z_A + \frac{1}{\rho} \cdot P_A + \frac{1}{2} \cdot V_A^2 + c \cdot T_A$

L'énergie totale en **B** vaut : $E_{Totale\ B} = E_{B1} + E_{B2} + E_{B3} + E_{B4} = g \cdot z_B + \frac{1}{\rho} \cdot P_B + \frac{1}{2} \cdot V_B^2 + c \cdot T_B$

Le **principe de conservation de l'énergie** donne : $E_{Totale\ A} = E_{Totale\ B}$ et, dans le cas particulier d'une **circulation isotherme**, on a

$T_A = T_B \quad \Rightarrow \quad E_{A4} = E_{B4}$ soit : $\frac{1}{2} v_A^2 + \frac{1}{\rho} P_A + g \cdot z_A = \frac{1}{2} v_B^2 + \frac{1}{\rho} P_B + g \cdot z_B$

Qu'on préfère écrire comme ceci :

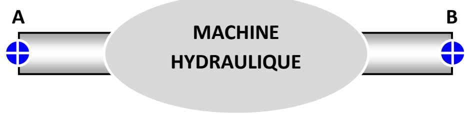
$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot \left(v_A^2 - v_B^2\right) + \frac{1}{\rho} \cdot \left(P_A - P_B\right) + g \cdot \left(z_A - z_B\right) = 0}$$

Théorème de Bernoulli

Si le fluide est au repos, alors $v_A = v_B = 0 \quad \Rightarrow \quad P_A + \rho \cdot g \cdot z_A = P_B + \rho \cdot g \cdot z \quad \Rightarrow \quad \Delta P = -\rho \cdot g \cdot \Delta z$

On retombe donc sur la loi de l'hydrostatique pour un fluide incompressible et homogène.

Écoulement <u>avec échange</u> de travail avec l'extérieur



- Si le fluide traverse une machine hydraulique, alors il échange de l'énergie E avec la machine :

  $\Rightarrow$ $E > 0$ si la machine fournit de l'énergie au fluide (cas d'une pompe).

  $\Rightarrow$ $E < 0$ si le fluide cède de l'énergie à la machine (cas d'une turbine).

- Le fluide circule dans une conduite (ou un canal) dont les surfaces présentent une certaine **rugosité** qui est le siège de frottement.

  $\Rightarrow$ Ceci génère des **pertes de charge régulières** $E_{reg\,(AB)}$.

- La conduite peut présenter des **accidents** de parcours (coudes, rétrécissements de section, etc.).

  $\Rightarrow$ Ils occasionnent des **pertes de charge singulières** $E_{\sin g\,(AB)}$.

Le théorème de Bernoulli se généralise alors come ceci :

Théorème de Bernoulli généralisé

$$\frac{1}{2} \cdot \left(v_A^2 - v_B^2\right) + \frac{1}{\rho} \cdot \left(P_A - P_B\right) + g \cdot \left(z_A - z_B\right) = E - E_{reg\,(AB)} - E_{sin\,g\,(AB)}$$

*Termes homogènes à **<u>une énergie</u>***

En multipliant tout par ρ :

$$\frac{\rho}{2} \cdot \left(v_A^2 - v_B^2\right) + \left(P_A - P_B\right) + \rho \cdot g \cdot \left(z_A - z_B\right) = E - E_{reg\,(AB)} - E_{sin\,g\,(AB)}$$

En divisant tout par $\rho \cdot g$:

*Termes homogènes à **<u>une pression</u>***

$$\boxed{\frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left(v_A^2 - v_B^2\right) + \frac{1}{\rho \cdot g} \left(P_A - P_B\right) + \left(z_A - z_B\right) = E - E_{reg\,(AB)} - E_{\sin g\,(AB)}}$$

*Termes homogènes à **<u>une hauteur</u>***

C'est essentiellement sous cette forme qu'on utilise le théorème de Bernoulli pour résoudre les problèmes.